



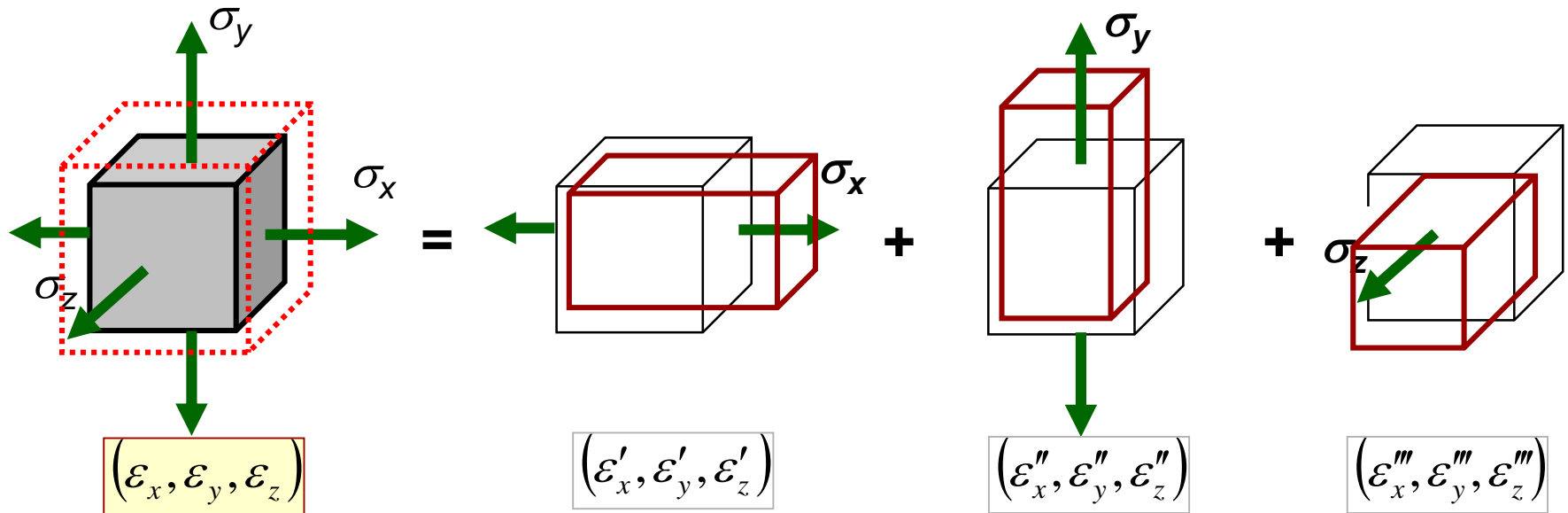
Ćwiczenia 4

Prawo Hooke'a - zadania

Przykłady zadań z wykorzystaniem prawa Hooke'a

Uogólnione prawo Hooke'a

Rozważmy stan naprężenia jako superpozycję trzech stanów prostego rozciągania



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon'_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon'_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon''_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon''_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon'''_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

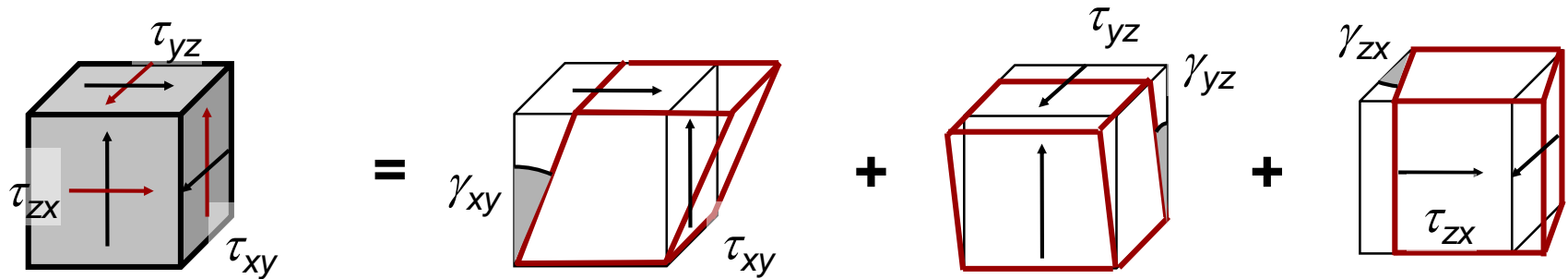
$$\varepsilon'''_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon'''_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

Efektom działania naprężeń normalnych jest stan odkształceń liniowych

Uogólnione prawo Hooke'a

Rozważmy stan naprężenia jako superpozycję trzech stanów ścinania kolejno w trzech płaszczyznach



Efektom działania naprężeń tnących jest stan odkształceń postaciowych

$$(\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$(\gamma_{xy}, 0, 0)$$

$$(0, \gamma_{yz}, 0)$$

$$(0, 0, \gamma_{zx})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

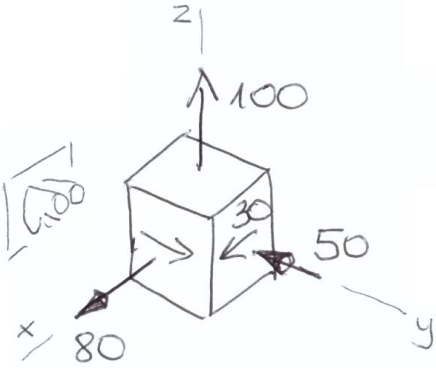
$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

G - moduł Kirchhoffa

ZADANIE 4.1



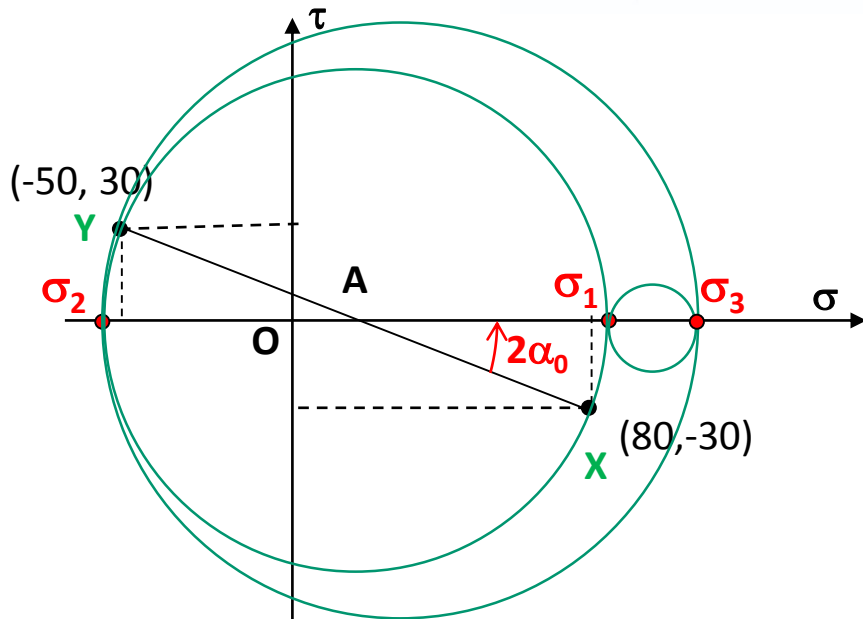
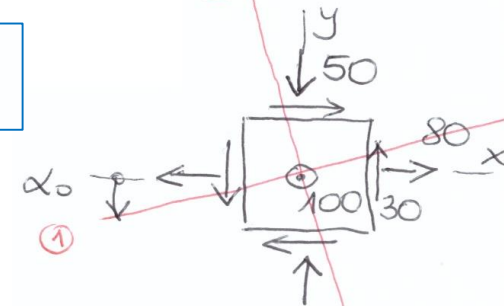
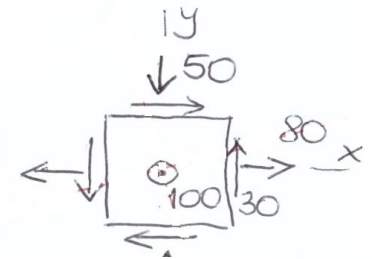
Zad. Dany jest stan naprężenia.

Znaleźć $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

materiał - stal: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

$\nu = 0.3$

(I) Spójrzmy na kostkę z kierunku z



$$OA = \frac{80 - 50}{2} = 15$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{80 + 50}{2}\right)^2 + 30^2} = 72$$

$$\sigma_1 = OA + R = 87 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = OA - R = -57 \text{ MPa}$$

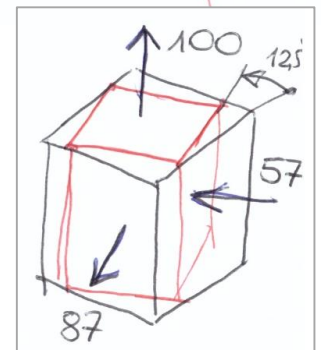
$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{30}{\frac{80 + 50}{2}}\right) = 12,5^\circ$$

Skorzystamy z prawa Hooke'a

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [87 - 0.3(-57 + 100)] = 0.37 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-57 - 0.3(100 + 87)] = -0.56 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [100 - 0.3(87 - 57)] = 0.455 \cdot 10^{-3}$$



ZADANIE 4.1

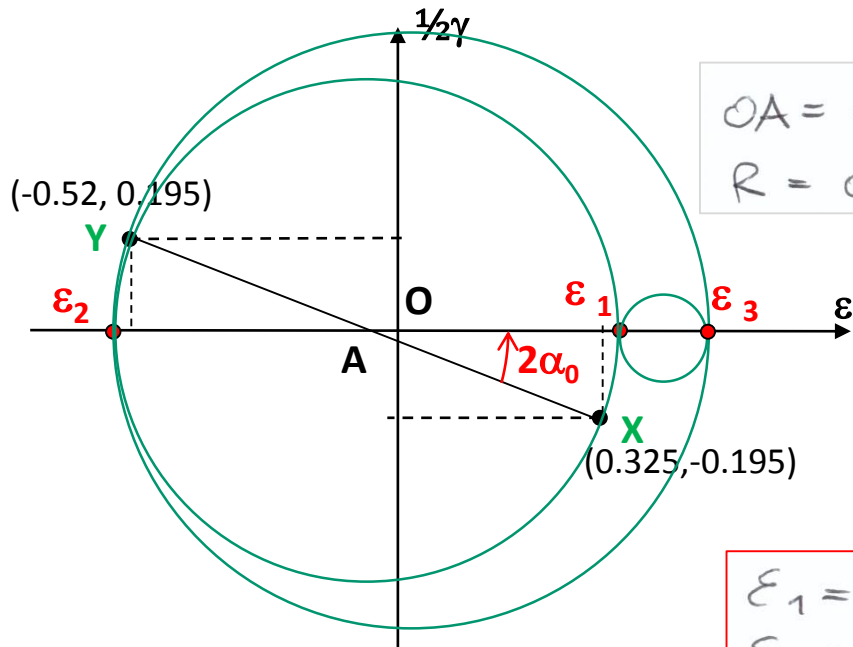
II) Sposób. Korzystamy najpierw z prawa Hooke'a

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [80 - 0.3(-50 + 100)] = 0.325 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-50 - 0.3(100 + 80)] = -0.52 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [100 - 0.3(80 - 50)] = 0.455 \cdot 10^{-3}$$

Przestwienić odkształceń



$$OA = -0.095 \cdot 10^{-3}$$

$$R = 0.465 \cdot 10^{-3}$$

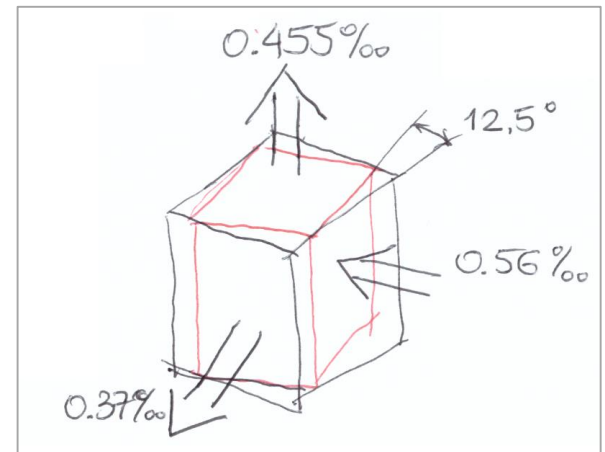
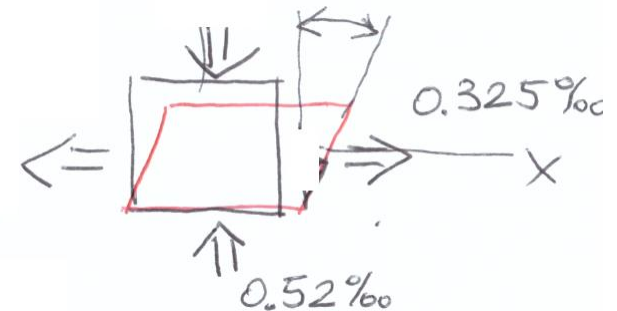
$$\varepsilon_1 = 0.37 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = -0.56 \cdot 10^{-3}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0.3)} = 7.69 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{-30}{7.69 \cdot 10^4}$$

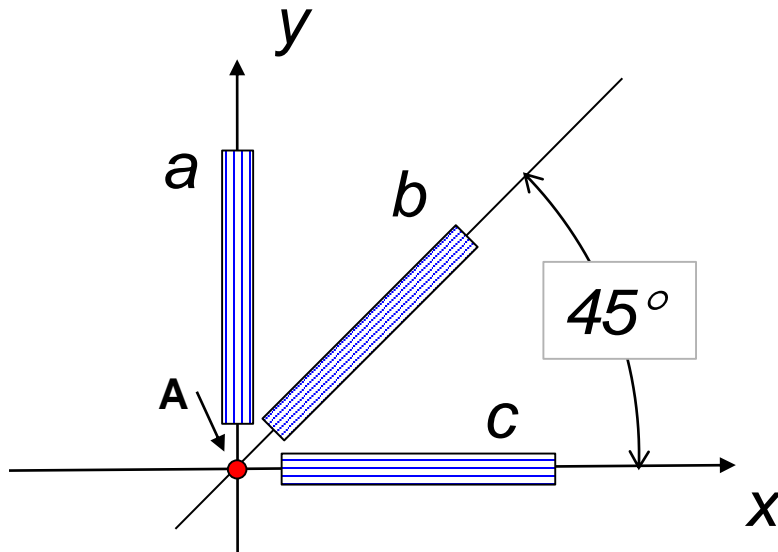
$$\gamma_{xy} = -3.9 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$



ZADANIE 4.2

W pewnym punkcie pokrycia skrzydła samolotu naklejono rozetkę trzech tensometrów **a**, **b** i **c**.
W pewnej chwili lotu zmierzono wskazania tensometrów: ε_a , ε_b , ε_c .

- 1) Wyznaczyć odpowiadający temu stan naprężenia
- 2) Określić i pokazać kierunki główne naprężenia



Material – dural

$$E = 7 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.32$$

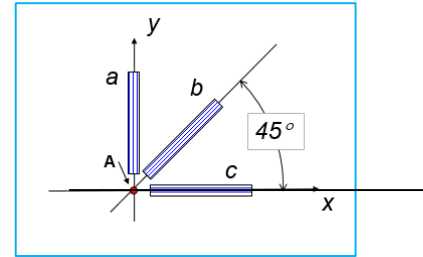
$$\varepsilon_a = 0.4 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_b = -0.2 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_c = 0.1 \text{ ‰}$$

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$

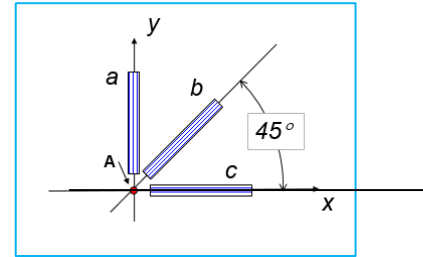
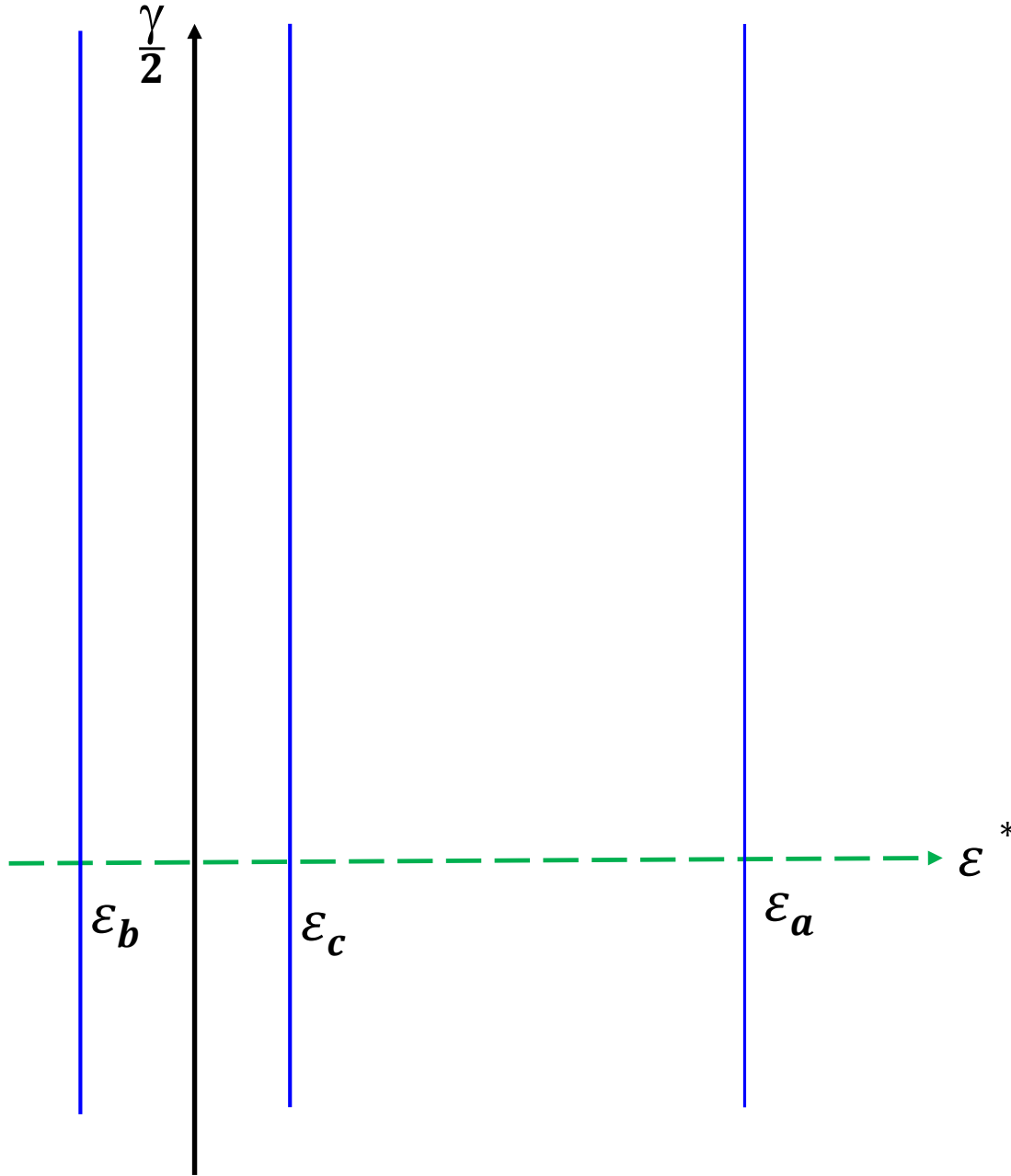
$\frac{\gamma}{2}$



1) Rysujemy oś $\frac{\gamma}{2}$ i oś pomocniczą ϵ^*

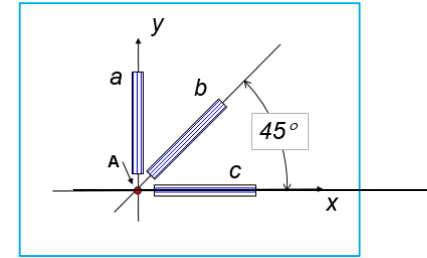
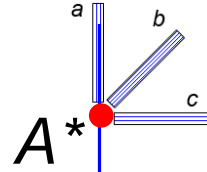
ϵ^*

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°

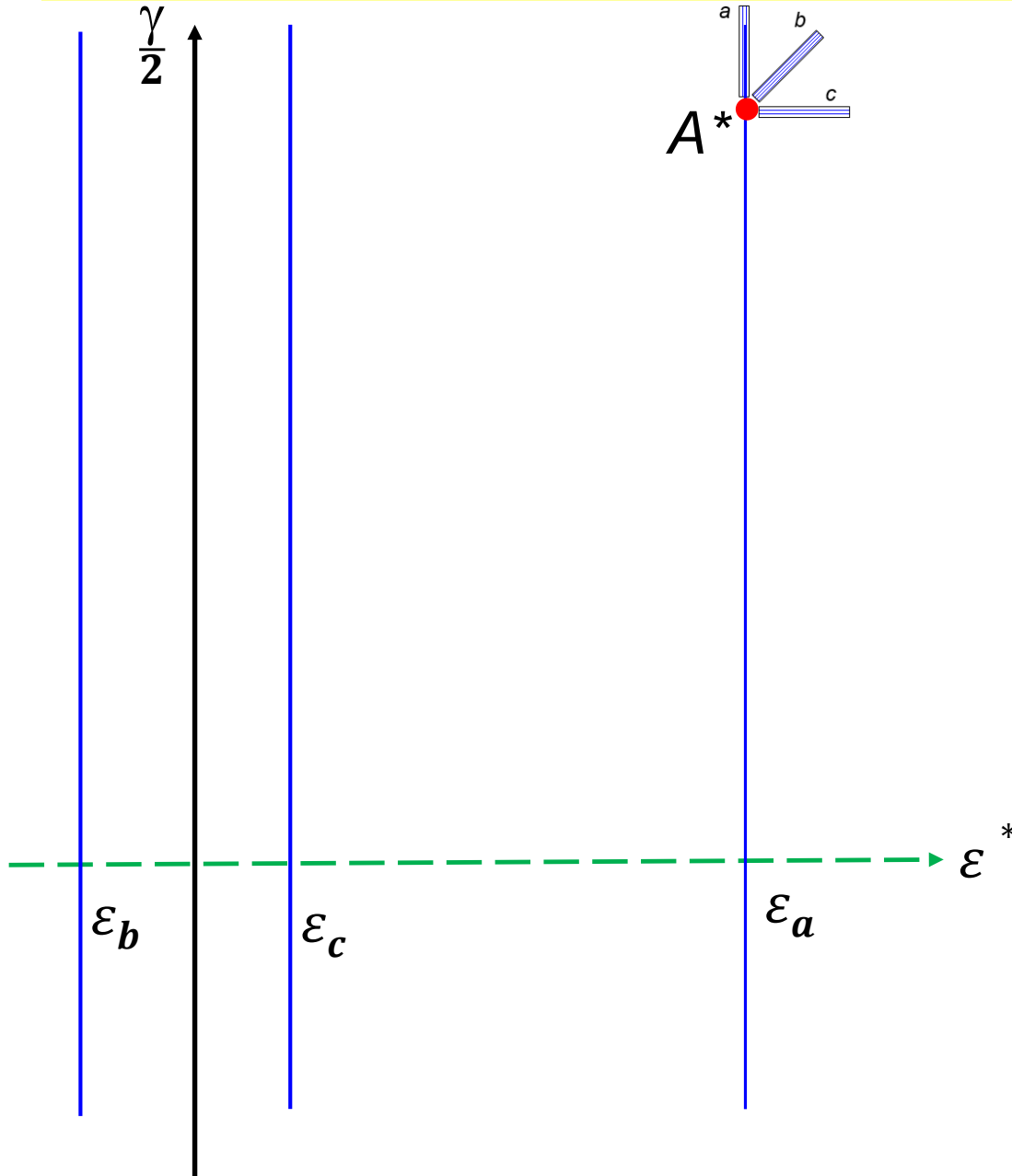


2) Rysujemy linie wskazań tensometrów

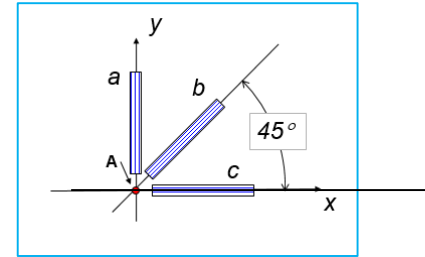
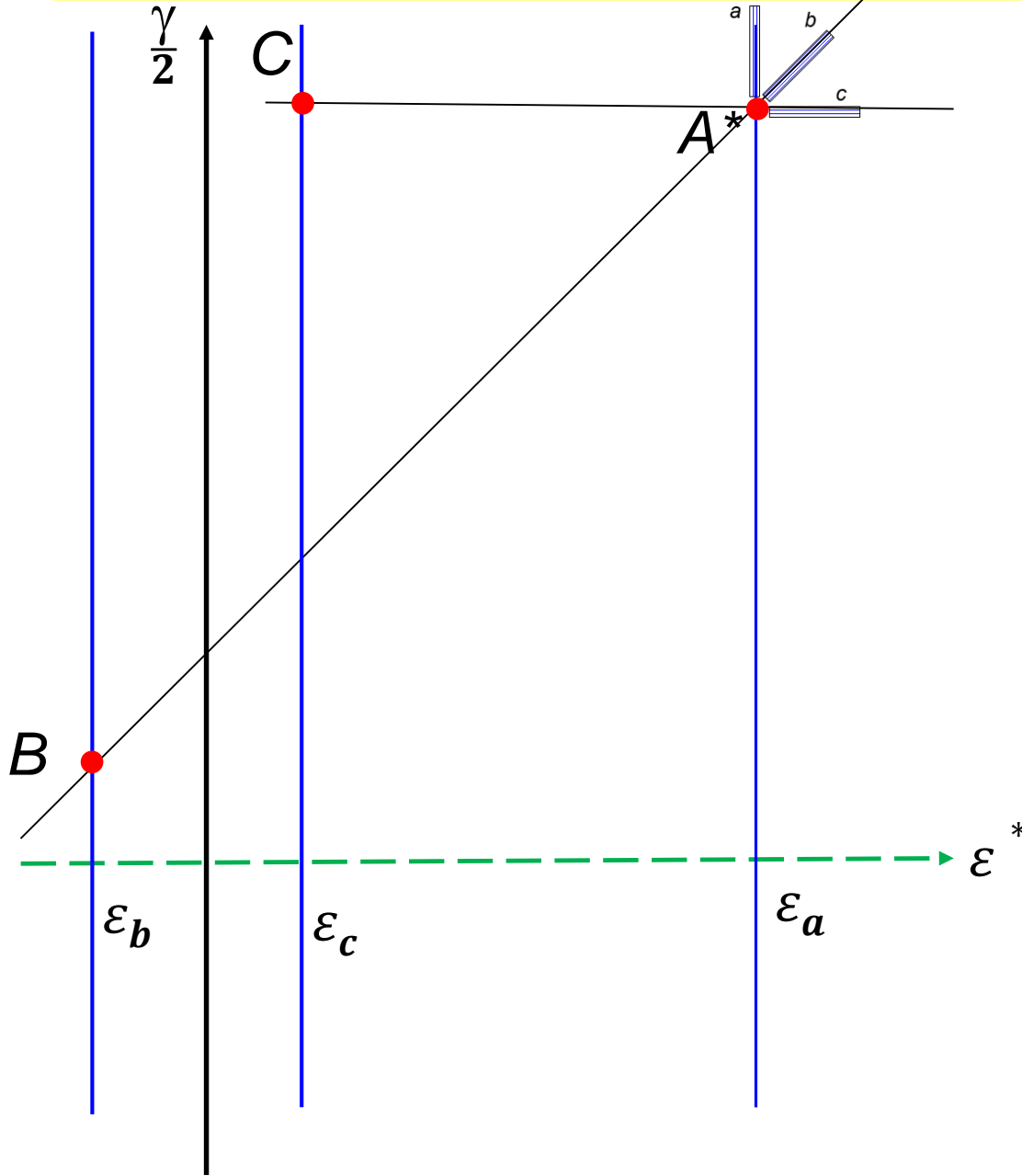
Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



3) Obieramy punkt startowy i rysujemy rozetkę zgodnie z kierunkiem odpowiedniego tensometru

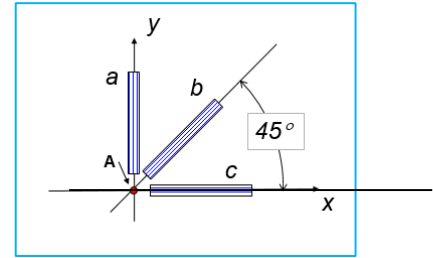
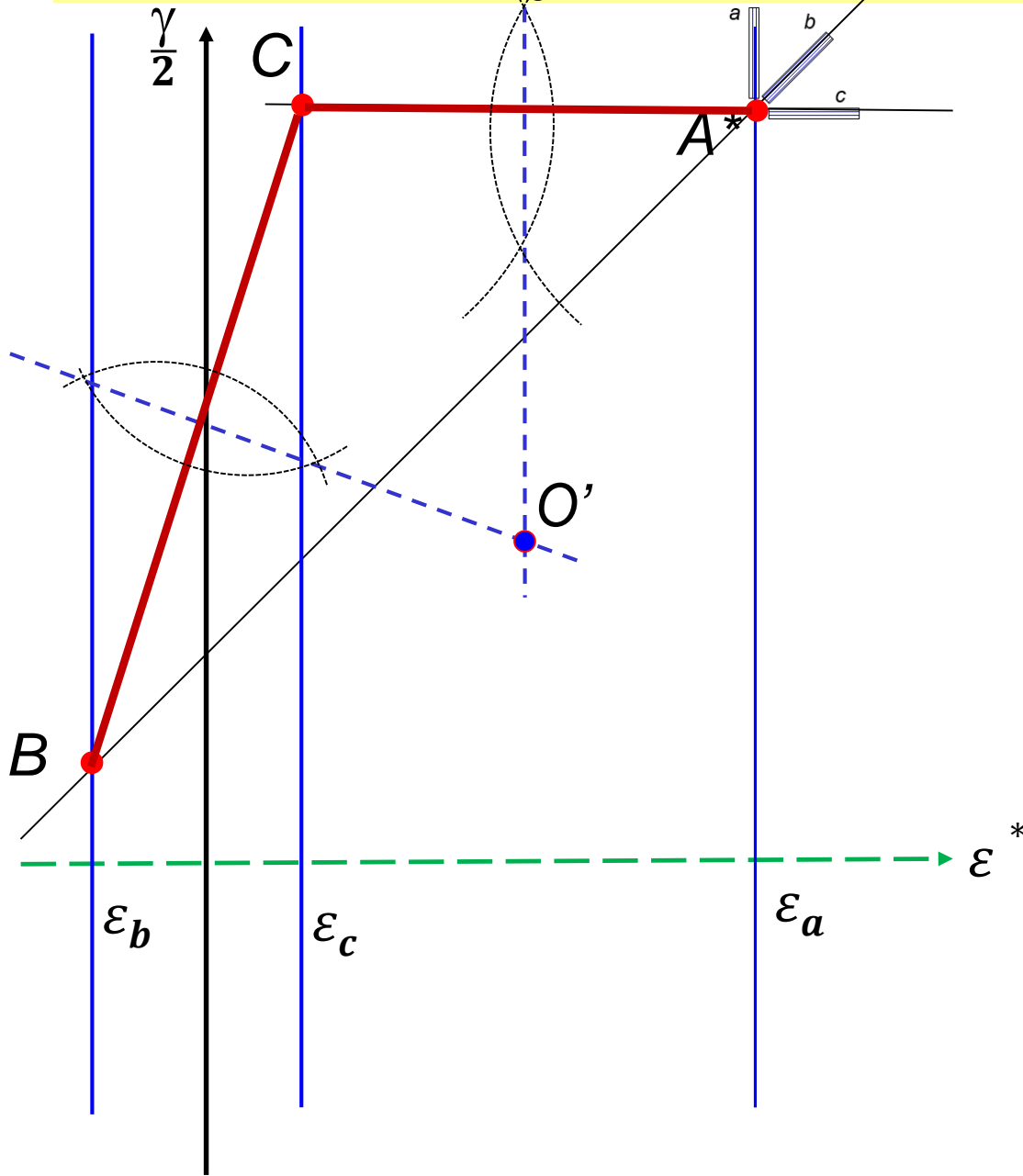


Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



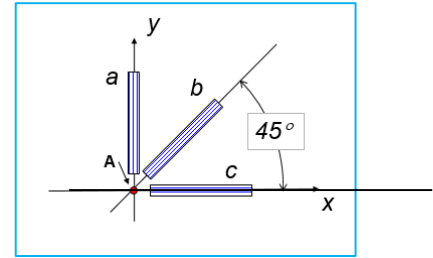
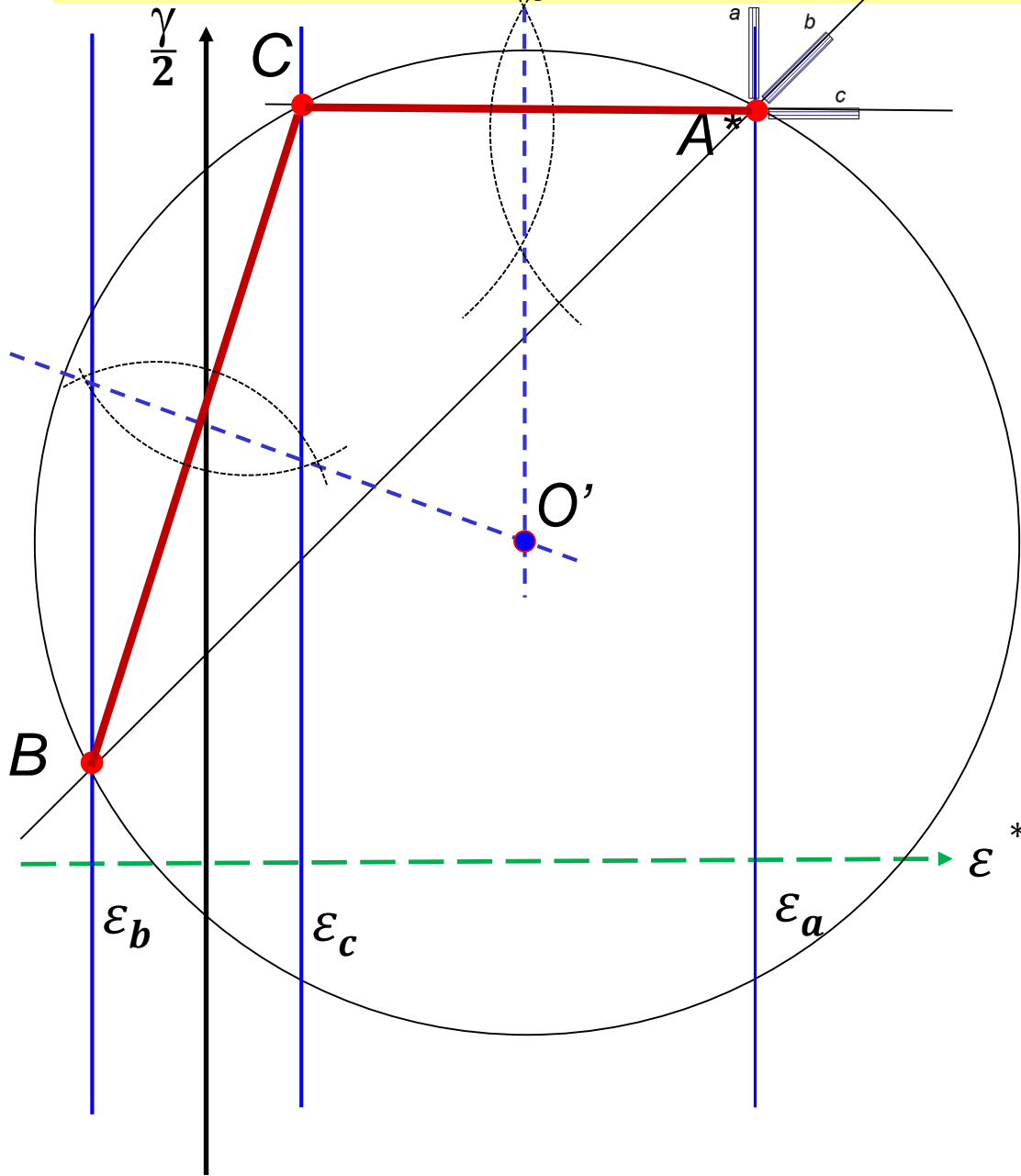
4) Rysujemy linie na kierunkach tensometrów, które przetną odpowiednie linie ich wskazań

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$



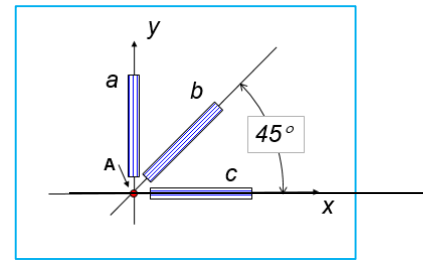
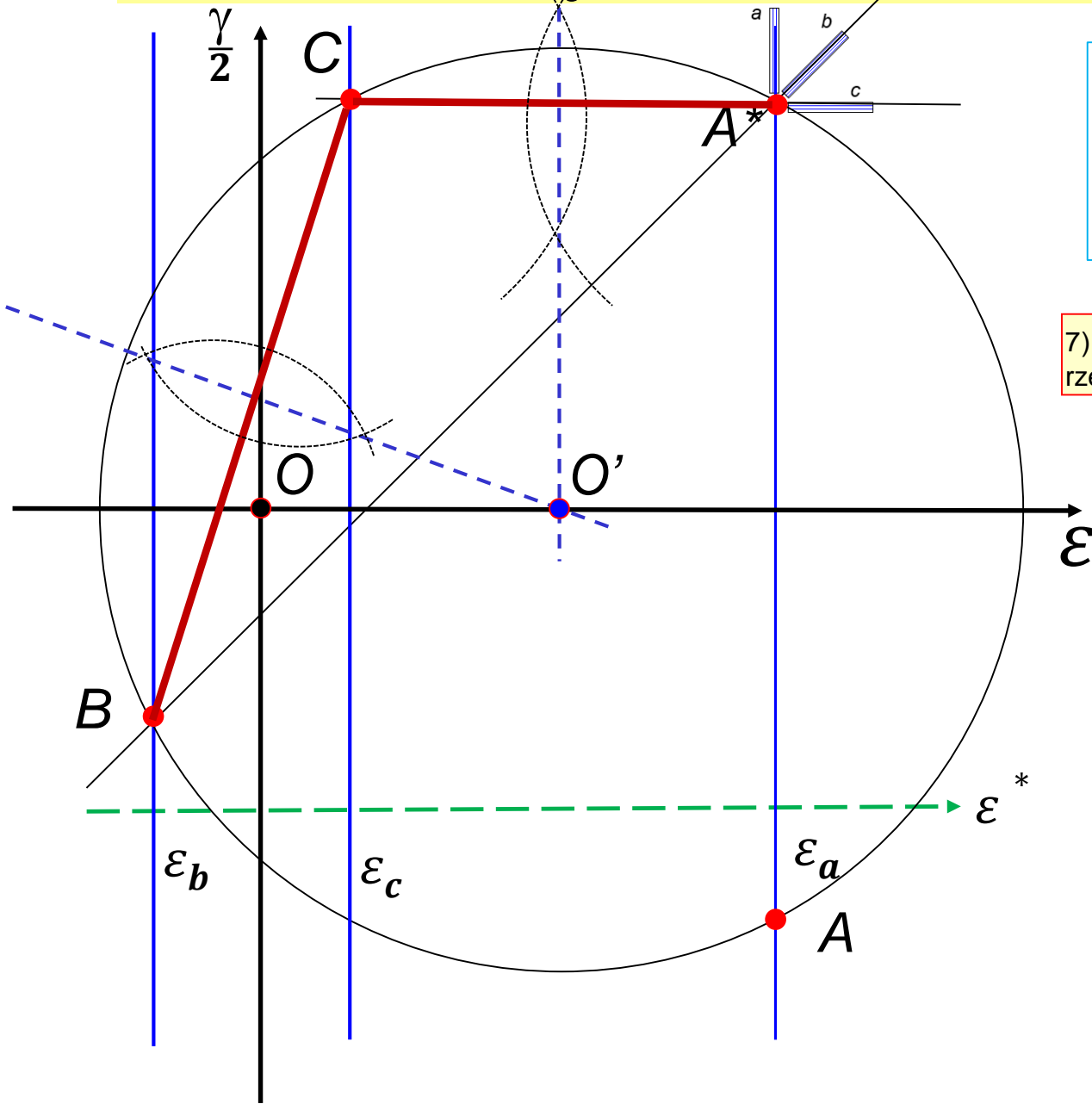
5) Rysujemy symetralne odcinków (cięciw) a na ich przecięciu oznaczamy środek koła Mohra O'

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$



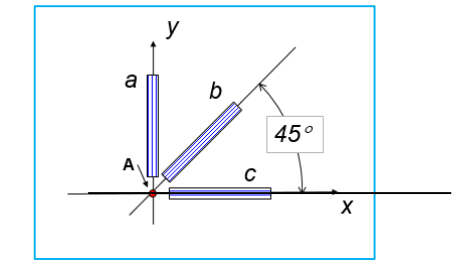
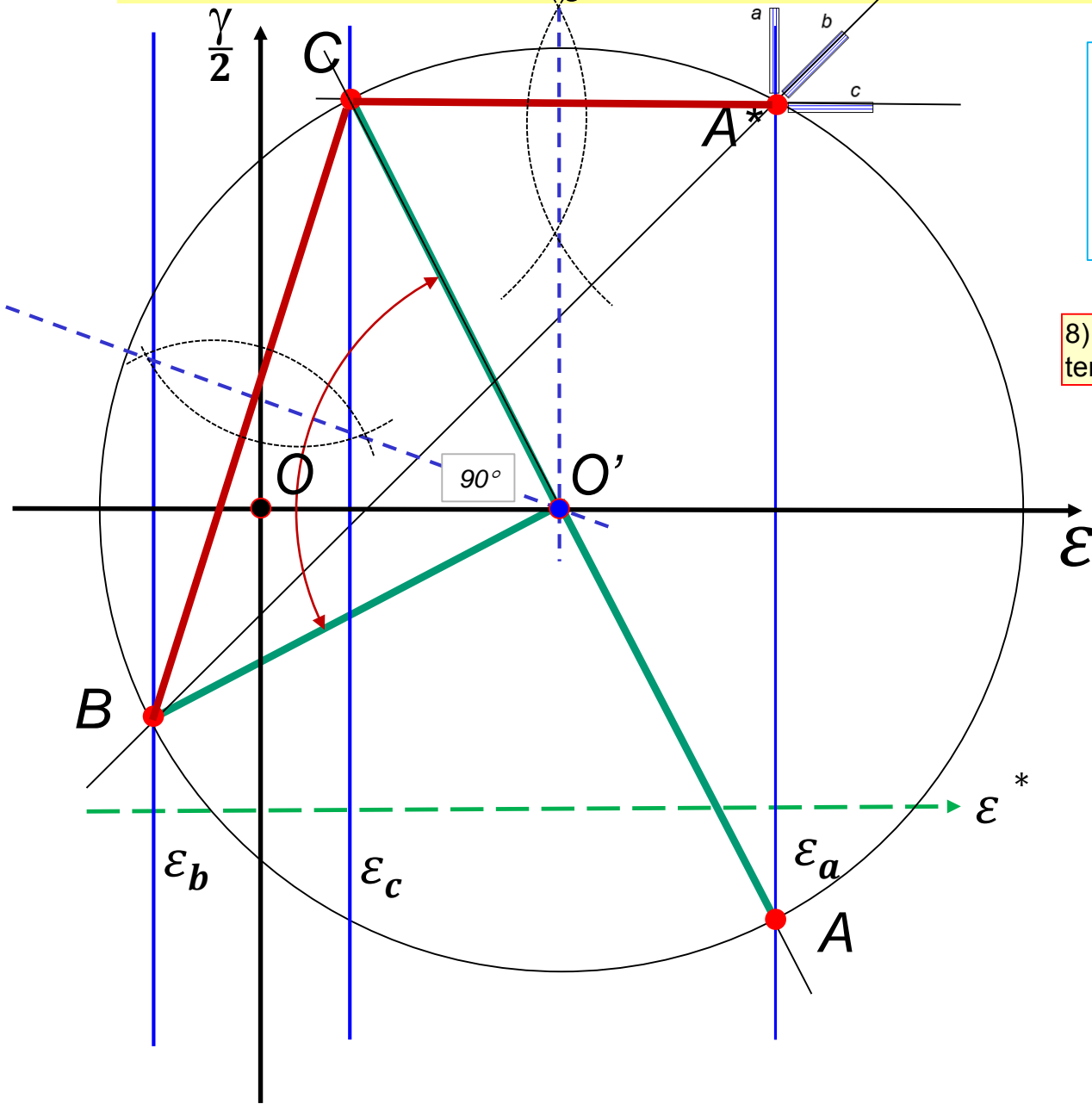
6) Rysujemy koło Mohra

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$



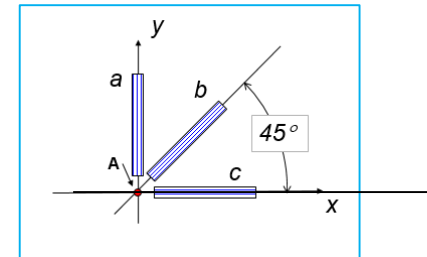
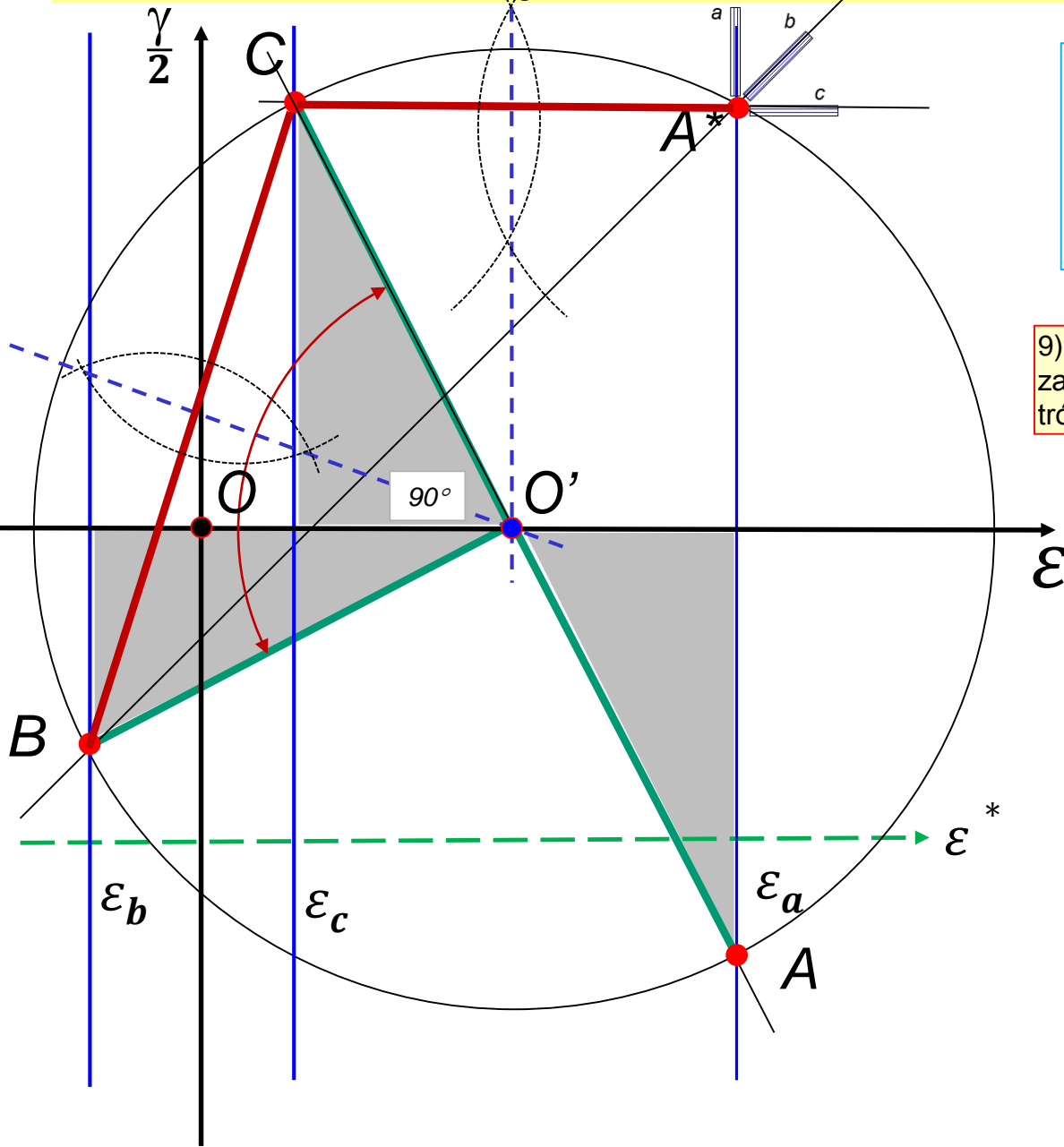
7) Rysujemy oś rzeczywistą ξ i oznaczamy rzeczywisty punkt wskazania A

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



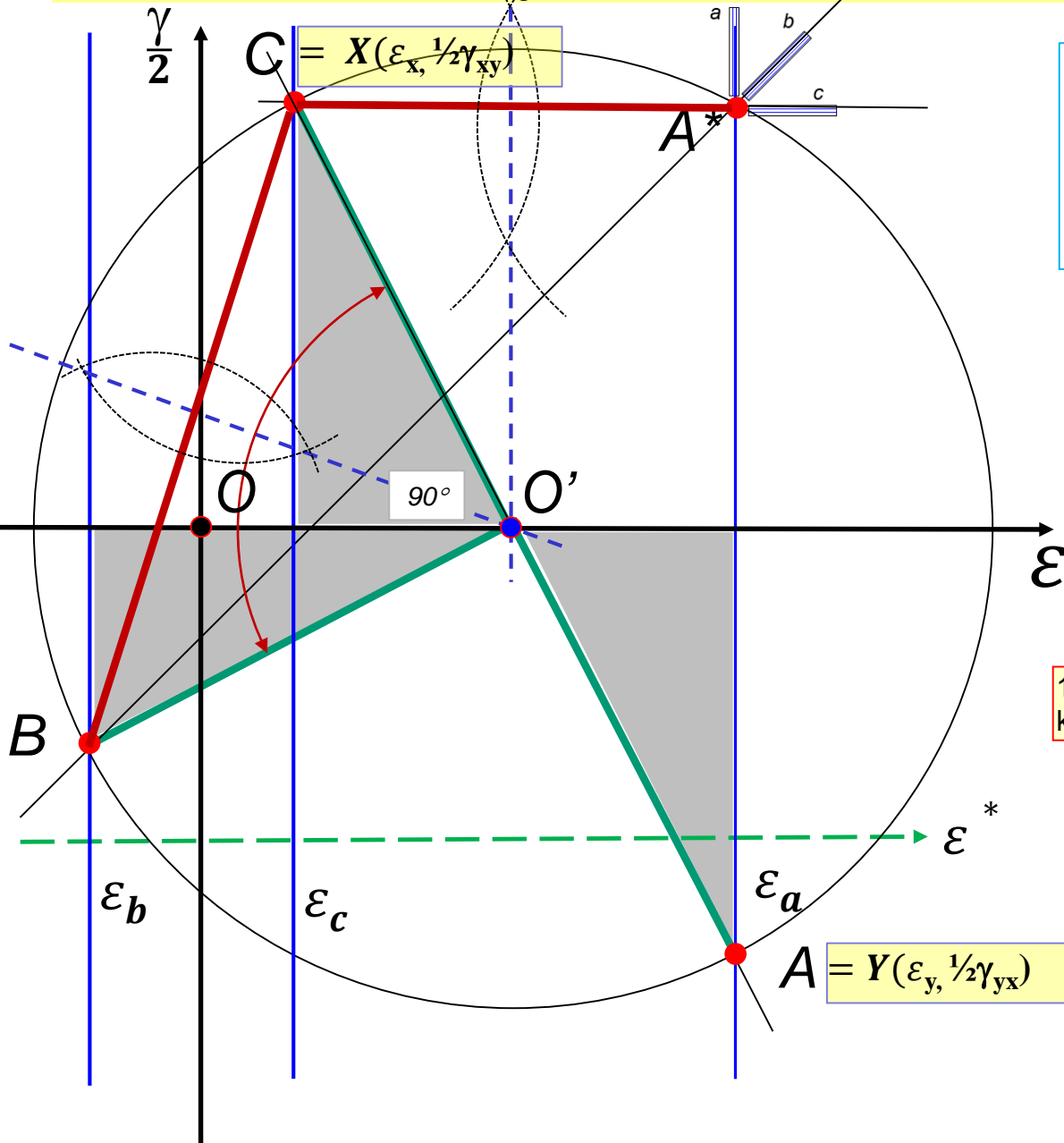
8) Punkty A, B i C są punktami wskazań tensometrów

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$

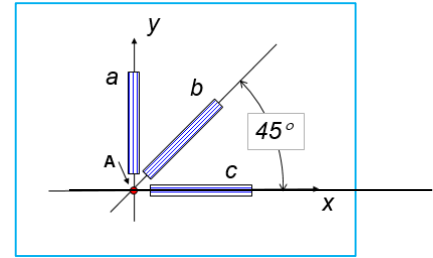
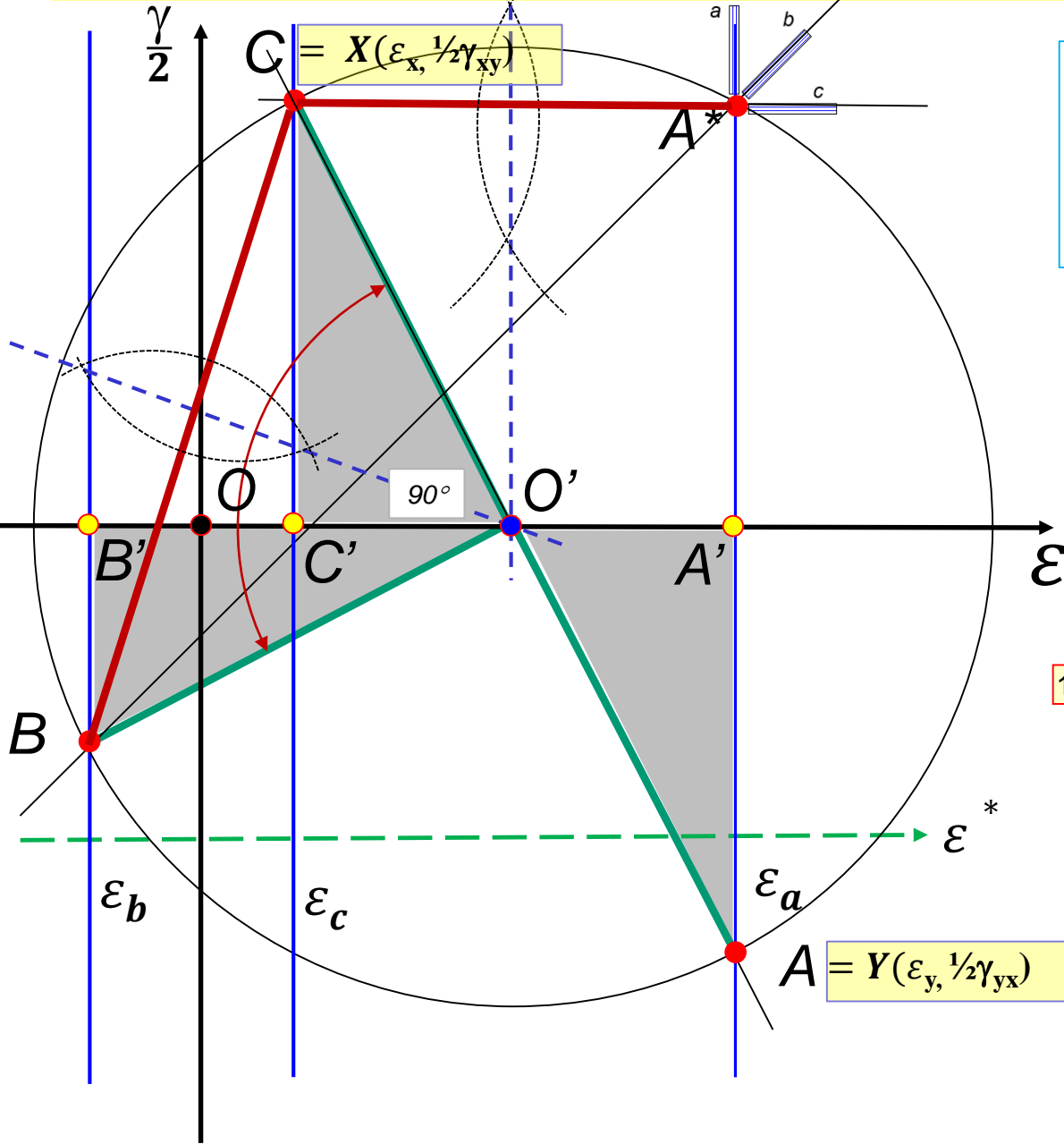


9) Dla takiej rozetki ($45^\circ/90^\circ$) można zauważyć podobieństwo odpowiednich trójkątów

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



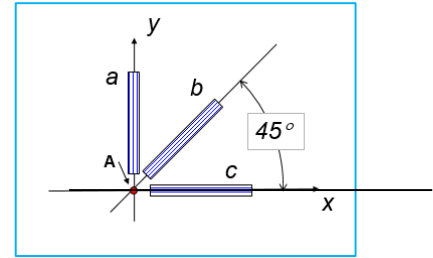
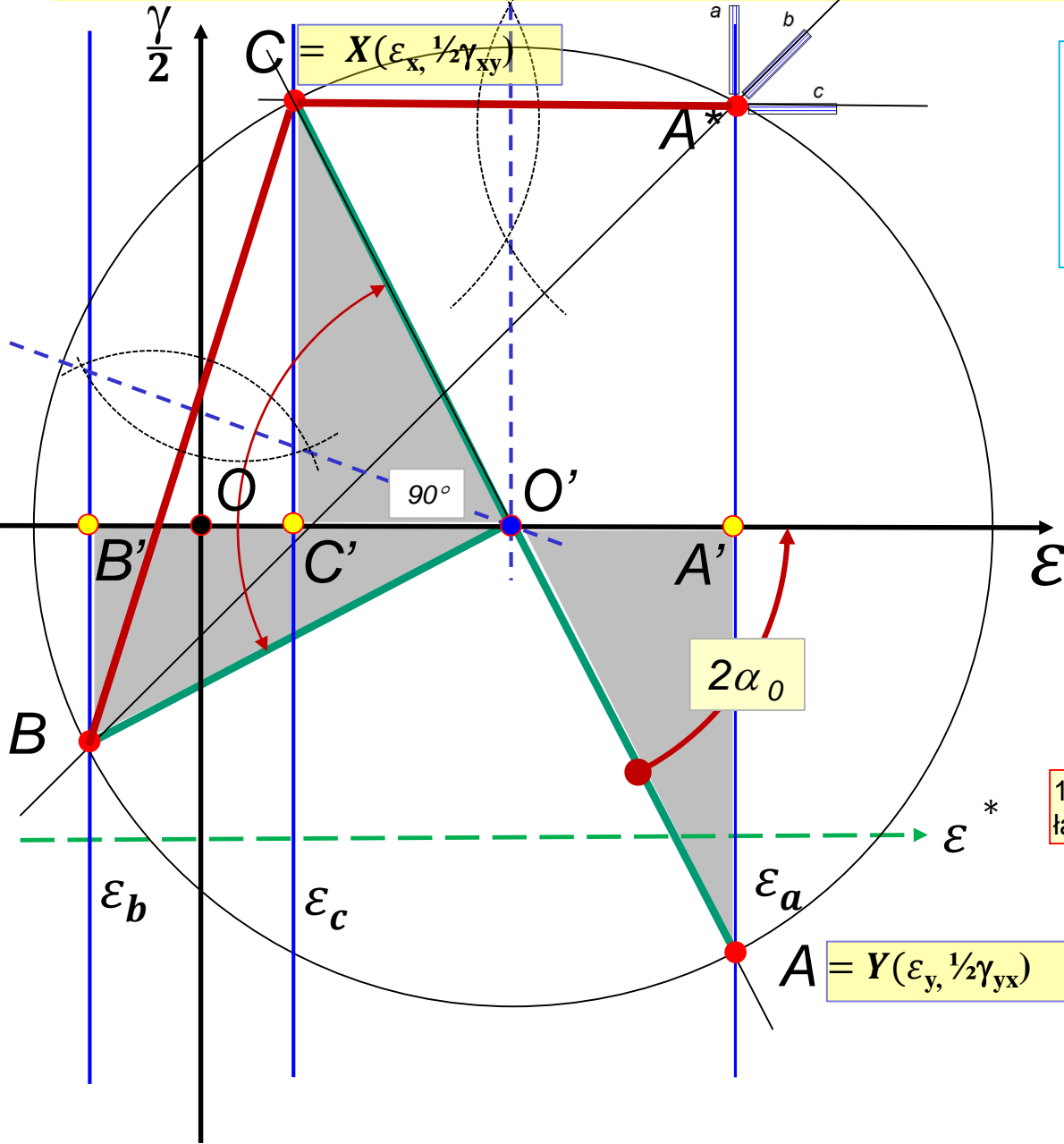
$$OO' = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 0.25\%$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_c = 0.1\%$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_a = 0.4\%$$

11) Wprowadźmy dodatkowe punkty A', B' i C'

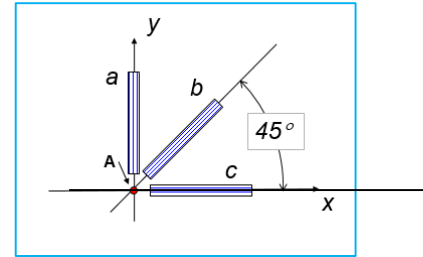
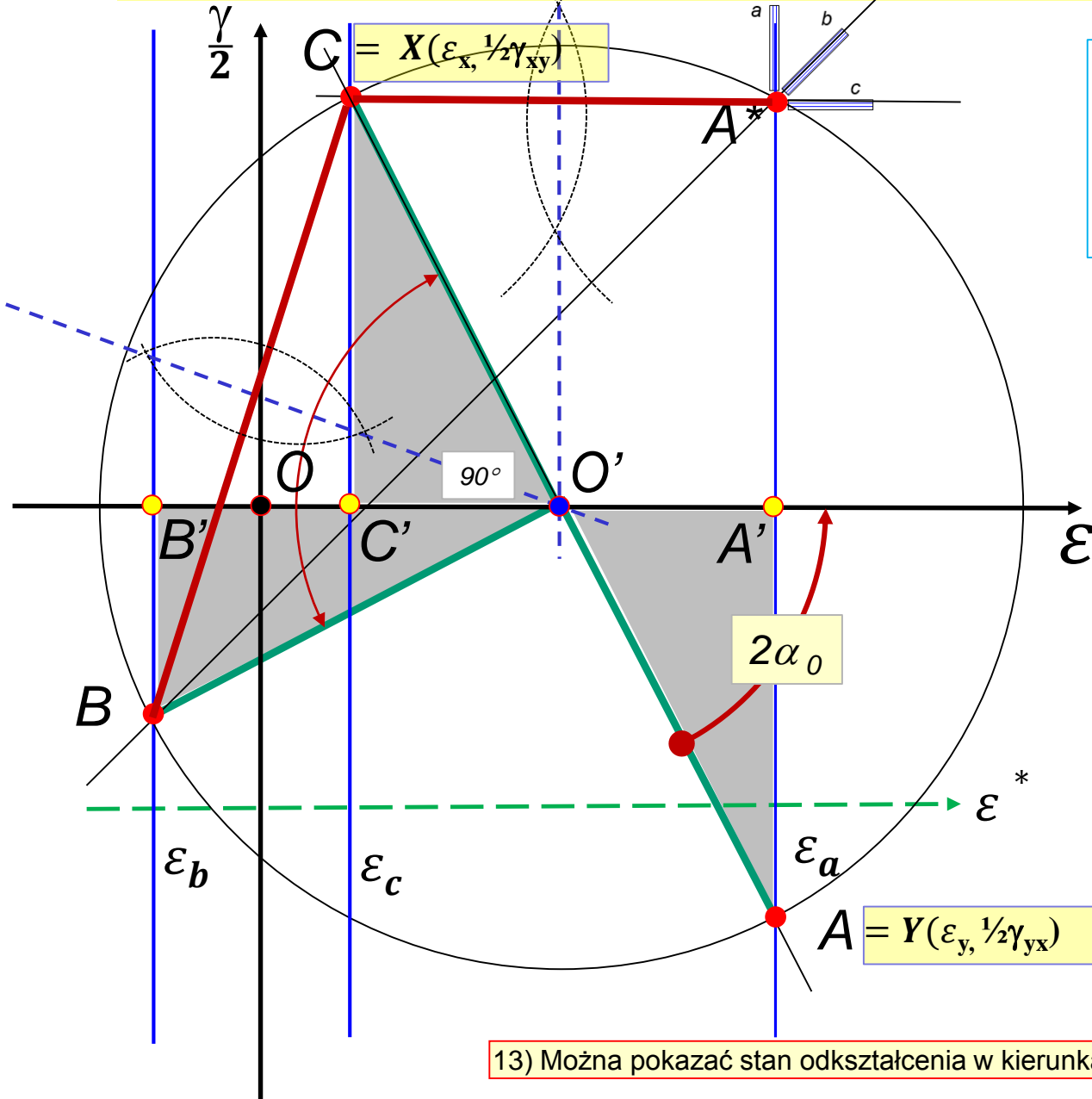
Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



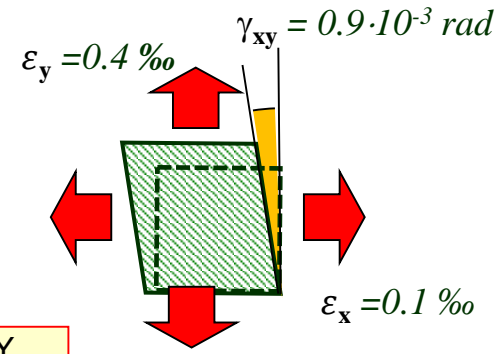
$OO' = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 0.25\text{‰}$
 $\varepsilon_x = \varepsilon_c = 0.1\text{‰}$
 $\varepsilon_y = \varepsilon_a = 0.4\text{‰}$
 $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = CC' = OB' = OO' - \varepsilon_b$
 $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) - \varepsilon_b = 0.45\text{‰}$
 $\gamma_{xy} = 0.9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$
 $\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg(CC' / C'O') = 36^\circ$

12) Korzystając z podobieństwa trójkątów łatwo wyznaczyć odpowiednie wartości

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°

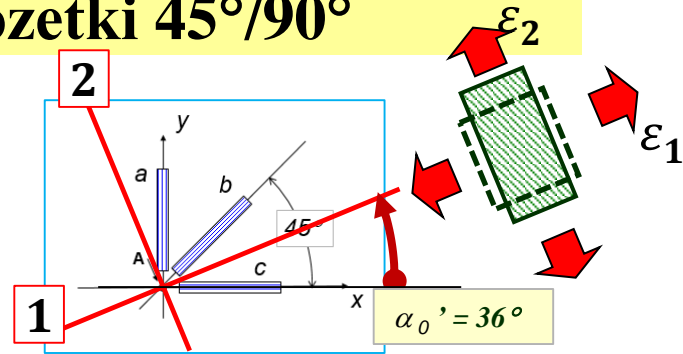
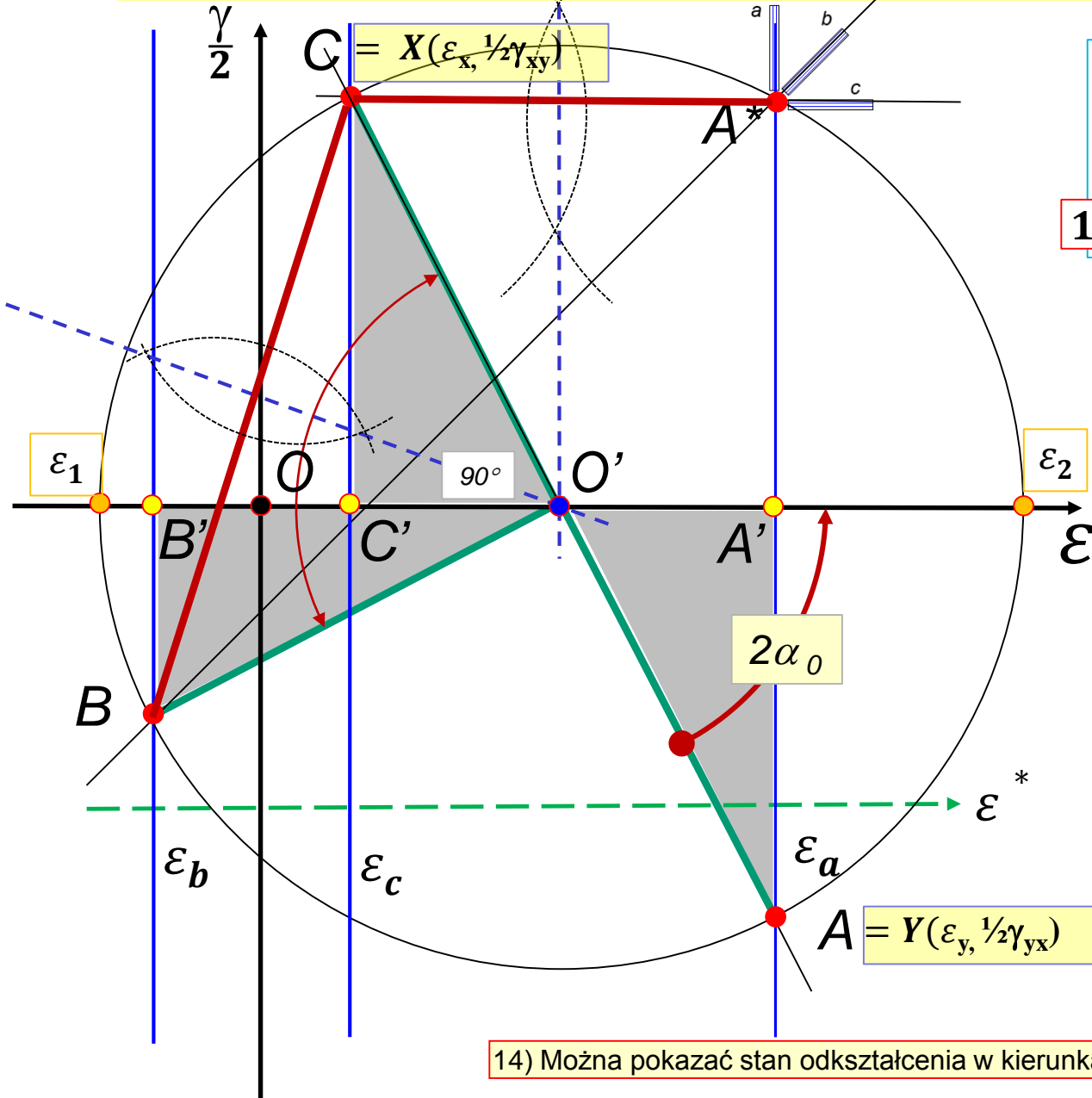


$OO' = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 0.25\%$
 $\varepsilon_x = \varepsilon_c = 0.1\%$
 $\varepsilon_y = \varepsilon_a = 0.4\%$
 $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = CC' = OB' = OO' - \varepsilon_b$
 $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) - \varepsilon_b = 0.45\%$
 $\gamma_{xy} = 0.9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$
 $\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg(CC'/C'O') = 36^\circ$



13) Można pokazać stan odkształcenia w kierunkach X, Y

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



$$OO' = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 0.25\text{‰}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_c = 0.1\text{‰}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_a = 0.4\text{‰}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = CC' = O'B' = OO' - \varepsilon_b$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) - \varepsilon_b = 0.45\text{‰}$$

$$\gamma_{xy} = 0.9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg(CC' / C'O') = 36^\circ$$

$$R = \sqrt{[\frac{1}{2}(\varepsilon_a - \varepsilon_c)]^2 + [\frac{1}{2}\gamma_{xy}]^2}$$

$$\varepsilon_1 = OO' - R = -0.224\text{‰}$$

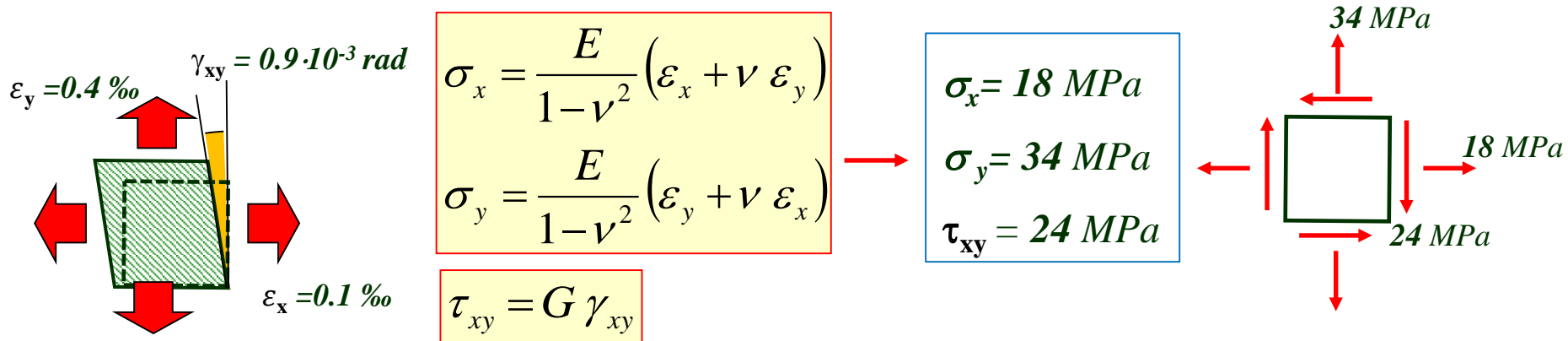
$$\varepsilon_2 = OO' + R = 0.724\text{‰}$$

14) Można pokazać stan odkształcenia w kierunkach głównych

Stan naprężenia

Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w płaskim stanie naprężenia (PSN)

1) w kierunkach nie głównych:

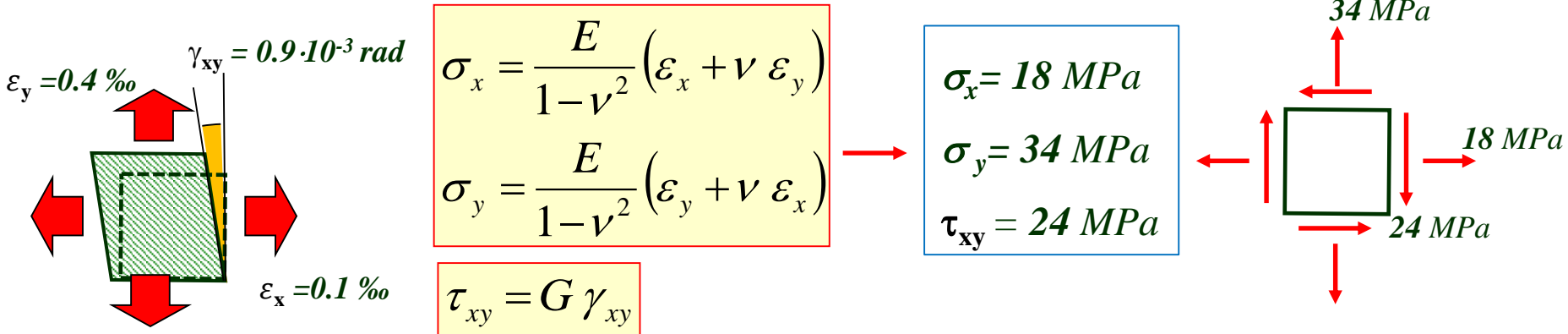


$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 2.65 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

Stan naprężenia

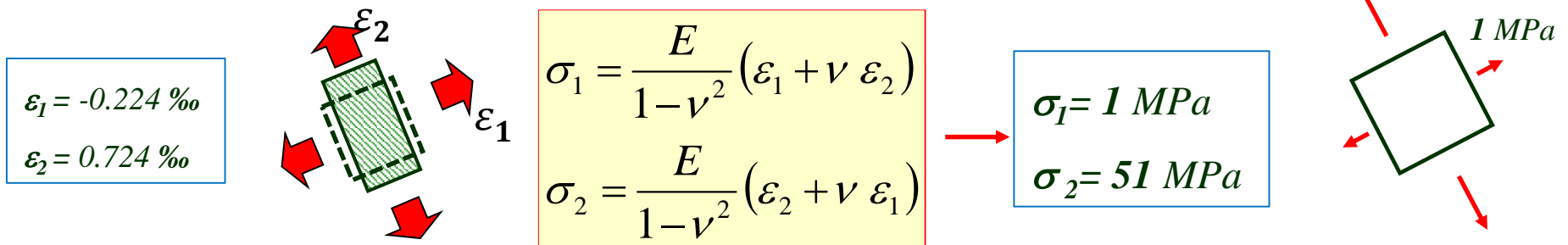
Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w płaskim stanie naprężenia (PSN)

1) w kierunkach nie głównych:



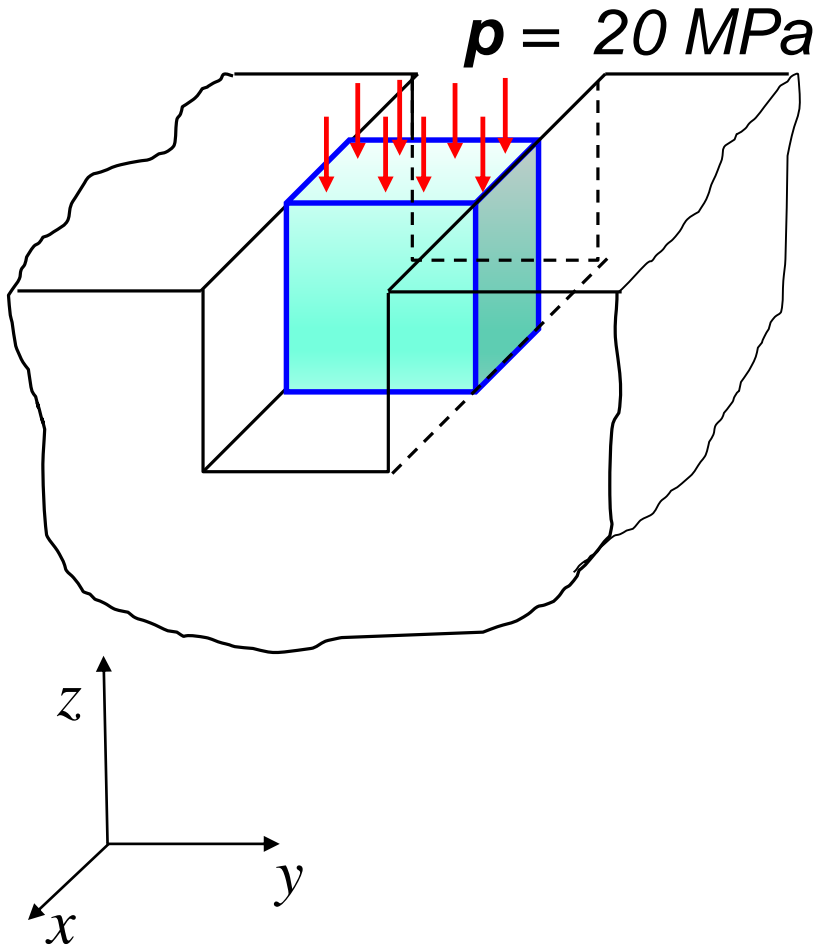
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 2.65 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

2) w kierunkach głównych:



ZADANIE 4.3

Kostkę sześcienną wykonaną z pleksiglasu umieszczono bez luzu i bez tarcia w stalowej pryzmie a następnie obciążono od góry naciskiem o wartości p .
Wyznaczyć względną zmianę objętości kostki.

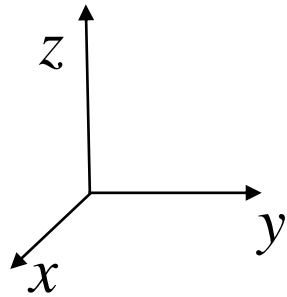
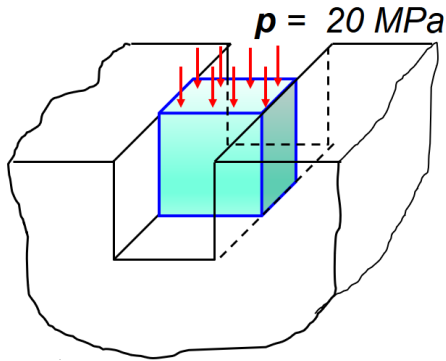


Material – pleksiglas

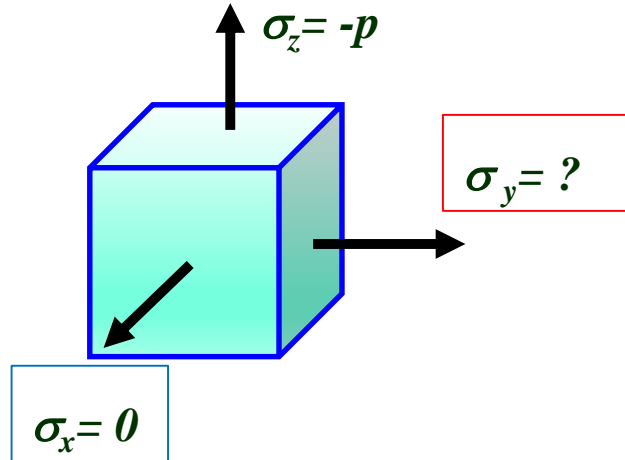
$$E = 3 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.34$$

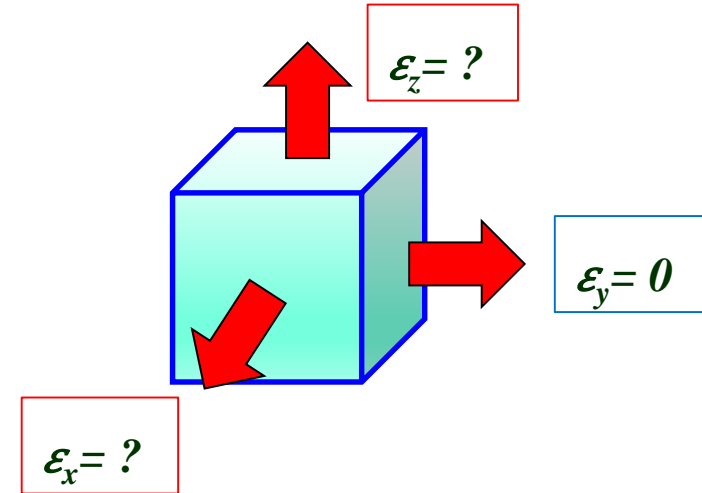
ZADANIE 4.3



Stan naprężenia:



Stan odkształcenia:



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (0 - \nu(\sigma_y - p)) \\ 0 &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(-p + 0)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (-p - \nu(0 + \sigma_y))\end{aligned}$$

ZADANIE 4.3

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (0 - \nu (\sigma_y - p))$$
$$0 = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (-p + 0))$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (-p - \nu (0 + \sigma_y))$$

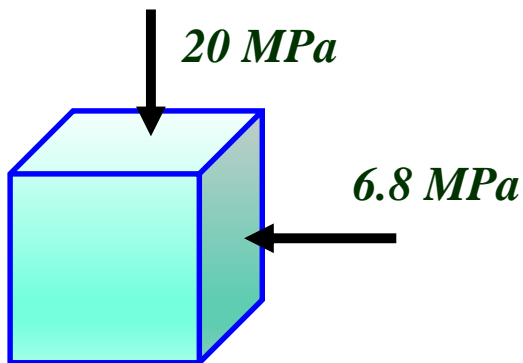


$$\varepsilon_x = \frac{\nu p}{E} (1 + \nu) = 0.003 = 3\%$$

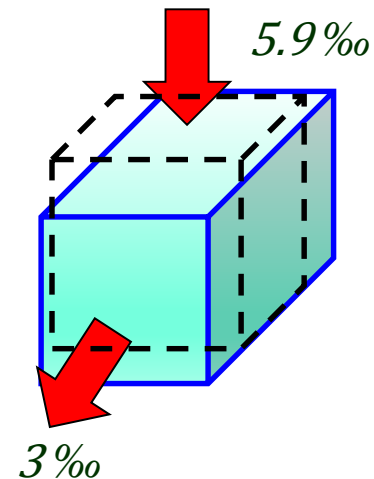
$$\sigma_y = -\nu p = -6.8 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_z = \frac{-p}{E} (1 - \nu^2) = -0.0059 = -5.9\%$$

Stan naprężenia:



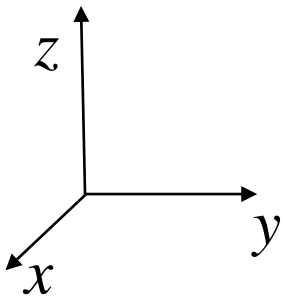
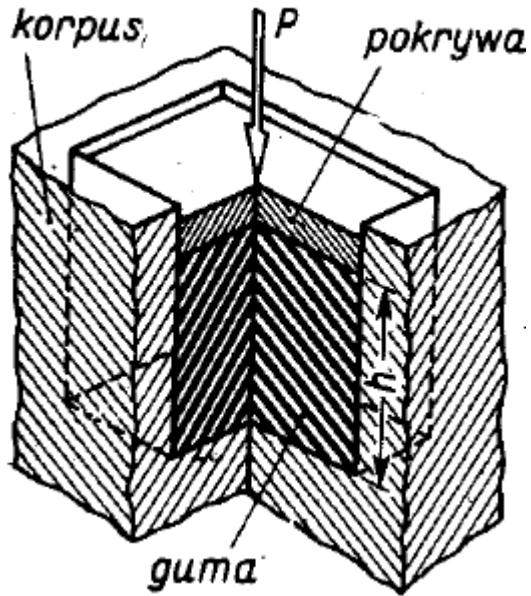
Stan odkształcenia:



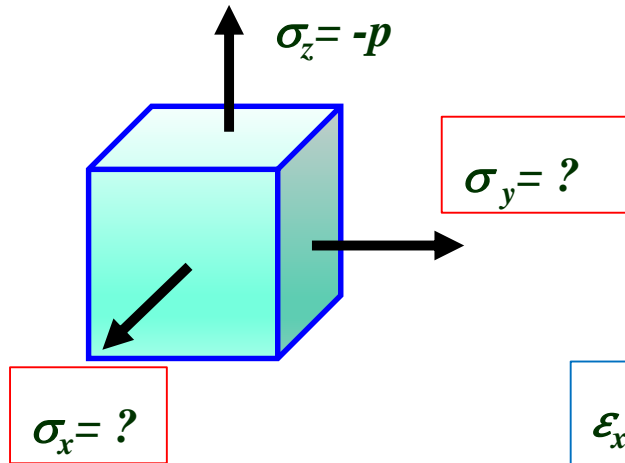
Względna zmiana objętości:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -0.0029 = -2.9\%$$

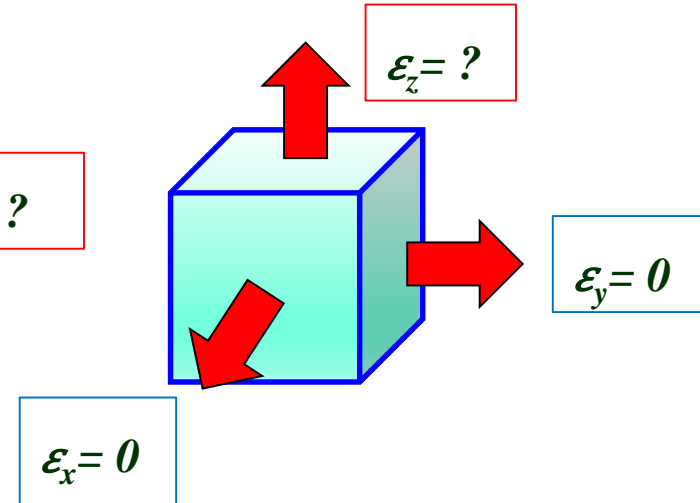
ZADANIE 4.4



Stan naprężenia:



Stan odkształcenia:

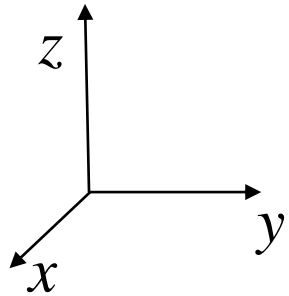
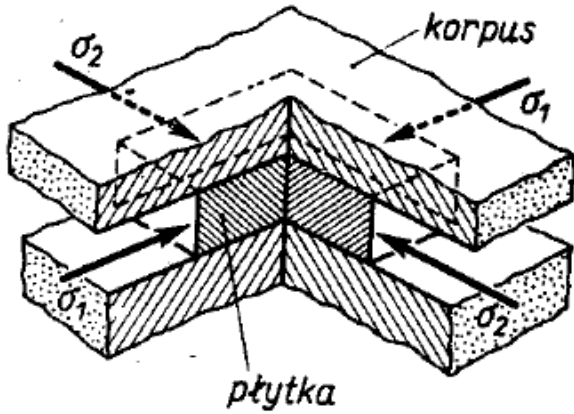


$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$

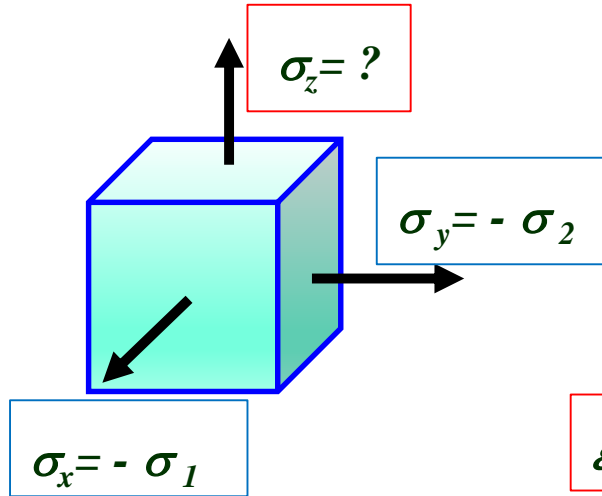


$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y - p)) \\ 0 &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(-p + \sigma_x)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (-p - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$

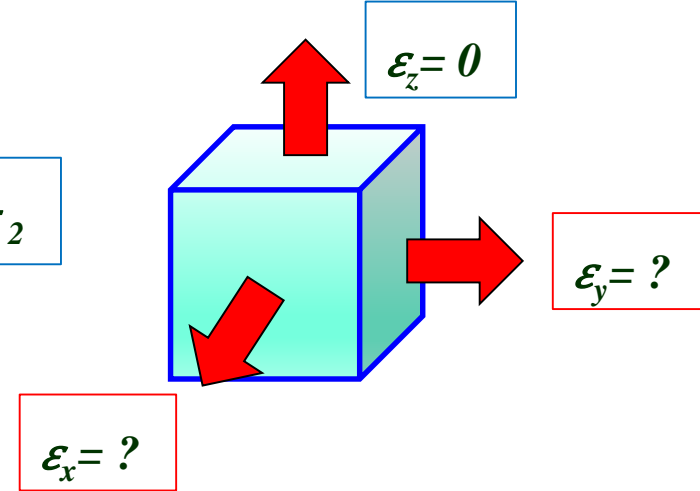
ZADANIE 4.5



Stan naprężenia:



Stan odkształcenia:



$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (-\sigma_1 - \nu(-\sigma_2 + \sigma_z)) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (-\sigma_2 - \nu(\sigma_z - \sigma_1)) \\ 0 &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(-\sigma_1 - \sigma_2))\end{aligned}$$

Podsumowanie

Uogólnione Prawo Hooke'a:

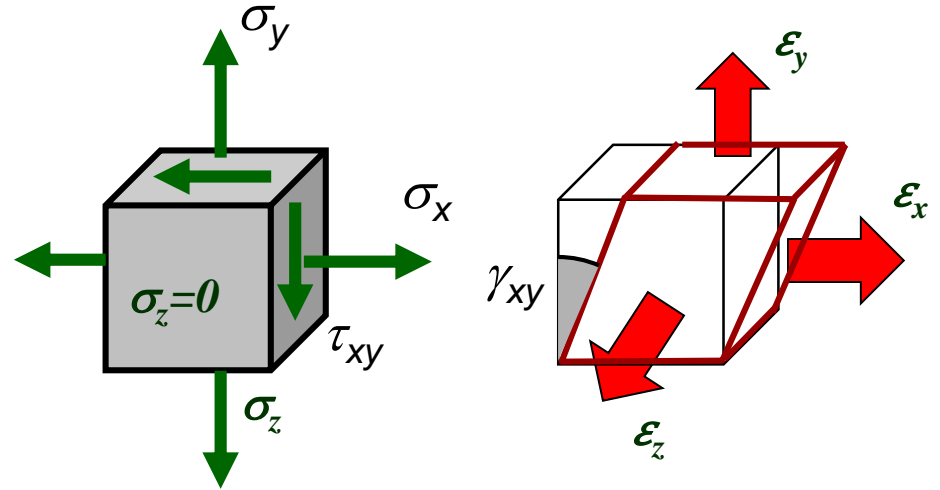
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned}$$

E - moduł Younga
 ν - stała Poissona
 G - moduł Kirchhoffa

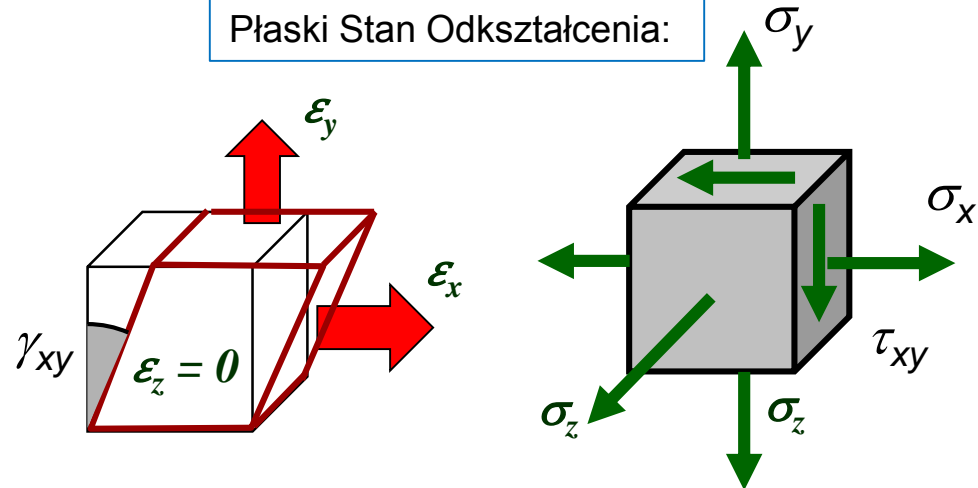
Dla materiałów izotropowych:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Płaski Stan Naprężenia:

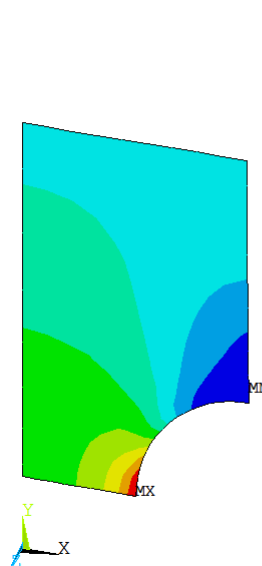
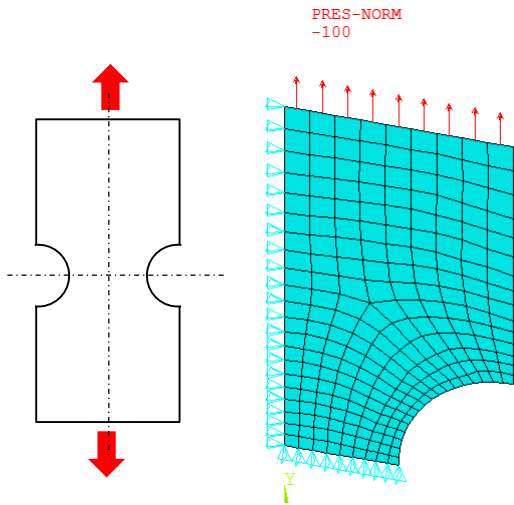


Płaski Stan Odkształcenia:

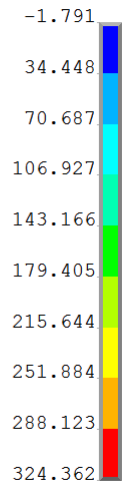


Podsumowanie

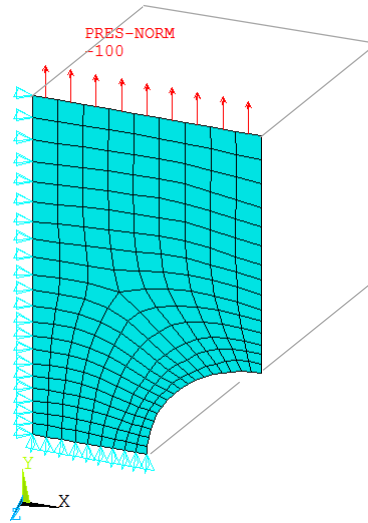
Płaski Stan Naprężenia



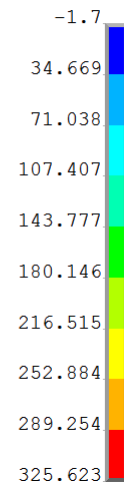
NODAL SOLUTION
SY
(AVG)



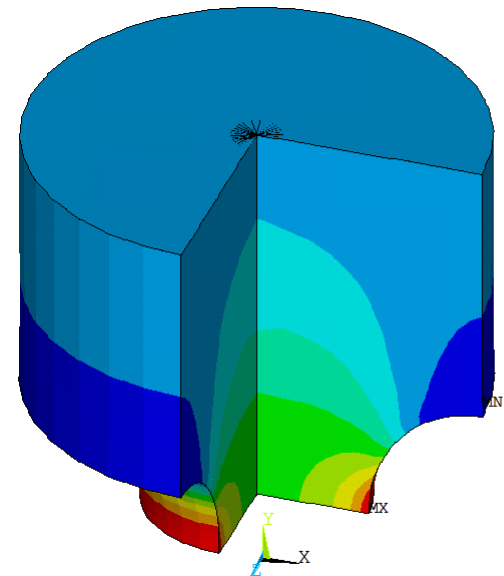
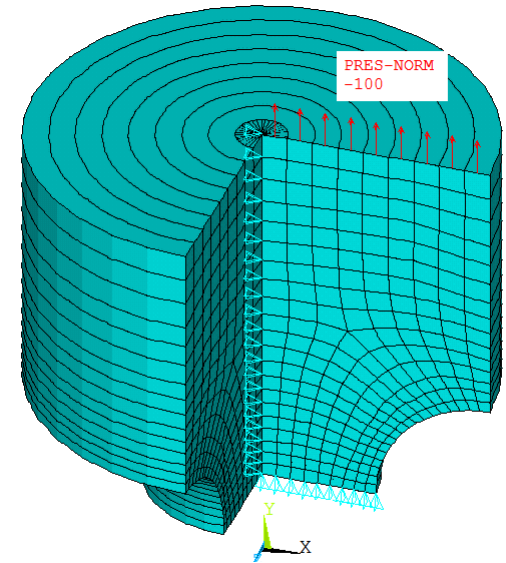
Płaski Stan Odkształcenia



NODAL SOLUTION
SY
(AVG)



Osiowa symetria



NODAL SOLUTION
/EXPANDED
SY
(AVG)

